

POLICUBOS

Maria Santacreu Ginestar

Paola Campos Climent

Cecilia Candela Galvañ

Noemi Ivars Delgado

Marta Martí Gil

1. Policubos

Los policubos son cubitos, normalmente de plástico, que se utilizan desde educación infantil hasta la educación secundaria como material de apoyo en la enseñanza de las matemáticas. Podemos elegir entre dos tamaños, aunque los dos tamaños no pueden utilizarse de forma conjunta. En general, se trata de pequeñas piezas, “*cuerpos geométricos formados por cubos iguales unidos, de formas diferentes (se ensartan unos con otros), por sus caras*” (Antón et al., 1994) Una ventaja de este recurso es su simplicidad, además de las posibilidades que brinda a los docentes para trabajar ciertos contenidos matemáticos.



Figura 1. Los policubos

1.1 Contenidos matemáticos cuyo aprendizaje se puede potenciar con los policubos

Los tópicos matemáticos con los que usar los policubos se pueden clasificar por ciclos. En primer ciclo, se puede usar para dar sentido a la conservación e introducción a la medida del volumen. Sabemos que éste es un contenido difícil en edades tempranas, pero con los policubos podemos aproximar a los alumnos a esta idea. Por ejemplo, con el mismo número de cubos se pueden hacer diferentes cuerpos geométricos, lo que permitirá comprobar que al utilizar el mismo número de piezas, el volumen también será el mismo, únicamente habrá cambiado la forma. También se pueden usar para el desarrollo del pensamiento espacial y la relación entre figuras representadas en 2D y la construcción de figuras en 3D con los policubos (Dickson, 1991). Por último, se pueden usar para representar *diagramas de barras*. Los alumnos se aproximan a la idea de los gráficos, a la vez que recogen datos y los representan. Por ejemplo, se puede hacer un diagrama de los colores de las camisetas de los niños, y ellos mismos deberán poner tantos cubos como camisetas haya del mismo color.

En segundo ciclo es posible centrarse en los mismos contenidos anteriores pero con un mayor nivel de abstracción, aunque existen otros tópicos como los cuerpos geométricos y sus dimensiones en los que es posible su uso. Se pueden hacer actividades donde los discentes deban construir, imitar y copiar cuerpos geométricos, siendo conscientes de los cubos que utilizan en cada caso. También se pueden usar con las

fracciones. Como existen diferentes colores, se pueden hacer formas diversas y preguntar por la relación entre una parte y el todo. Por ejemplo; ante una determinada figura formada por cubos de diferentes colores ¿qué fracción suponen los cubos amarillos en cada figura? Finalmente, también se pueden usar para representar cuerpos y estudiar el volumen de forma más completa que en cursos anteriores, aunque se siga haciendo hincapié en la conservación del mismo de manera más compleja.

2. Diseño de la propuesta

Esta propuesta está diseñada para llevarse a cabo tanto en el cuarto curso de educación primaria como en quinto. No obstante, con las modificaciones oportunas, se podría aplicar a cualquiera de los seis cursos de la educación primaria.

El objetivo es que los alumnos desarrollen la noción de volumen ocupado, su conservación e introducción a la medida utilizando los policubos:

- Comprender que diferentes cuerpos geométricos pueden estar formados por el mismo número de policubos (mediante la creación de figuras). Desarrollar la idea de volumen como espacio ocupado: figuras distintas ocupan el mismo lugar en el espacio y, por tanto, el mismo volumen (mediante el tanteo: composición y descomposición).
- Comprender que figuras diferentes con un mismo número de policubos, ocuparán un mismo espacio como una primera introducción a la medida. Apreciar que puede haber figuras diferentes utilizando el mismo número de policubos y que, de esta forma, el tamaño o volumen de estas no depende de su forma si no del número de unidades (mediante el análisis y la manipulación).

Los contenidos son:

CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES	ACTITUDINALES
-Conocimiento y aplicación de la conservación del volumen mediante los policubos.	-Creación de figuras para conseguir arraigar la idea de que diferentes figuras tienen el mismo número de policubos. -Manipulación y creación con las figuras para saber que diferentes formas de estas con un mismo número de policubos, ocuparan un mismo espacio. -Análisis de diversas figuras para conocer que el tamaño o el volumen de estas no depende de su forma si no del número de unidades.	-Curiosidad e interés por conocer las diferentes formas de representar las figuras -Participación y colaboración activa en el trabajo.

A lo largo de esta propuesta se contribuye al desarrollo de varias competencias planteadas en el currículum, con énfasis en la competencia matemática. Por eso, podemos

decir que con la realización de las diferentes tareas favorecemos el desarrollo de las dimensiones que componen la competencia, entendidas por:

- *Comprensión conceptual*, el alumno tiene la posibilidad de desarrollar la comprensión conceptual, ya que las actividades planteadas ofrecen oportunidades para relacionar los conceptos de volumen ocupado y conservación de volumen con los procedimientos requeridos y con el uso del material concreto en cada una de las tareas.
- *Desarrollo de destrezas*. Supone que el alumno puede desarrollar destrezas vinculadas al pensamiento espacial como las representaciones bidimensionales del espacio tridimensional o de construcción de cuerpos a partir de representaciones bidimensionales. .
- *Capacidad de comunicar y explicar matemáticamente*. Se contribuye al desarrollo de esta dimensión ya que las actividades posibilitan comunicar en cada momento las nociones adquiridas, los procedimientos y el uso de la reflexión, realizados mediante preguntas al finalizar las actividades.
- *Actitudes positivas en el alumno en relación con sus propias capacidades matemáticas*. Se pretende potenciar la auto-confianza, ya que el planteamiento de las actividades es guiado, con preguntas y por pasos favoreciendo el aumento de su confianza a la hora de resolver las tareas él solo, ya que dispondrá de la ayuda del material concreto.

2.1 Trayectoria de aprendizaje

Según Piaget, en Dickson (1991, 94-97), se establecen unos estadios del desarrollo de la comprensión del proceso de medida, en donde se incluye el volumen:

- *Estadio inicial*. Los alumnos no son capaces de captar la idea de conservación y se basan en características perceptuales para emitir un juicio sobre las medidas, y conservación del volumen. En este estadio un alumno puede decir que la primera composición de policubos tiene un menor volumen que la segunda (Figura 2).

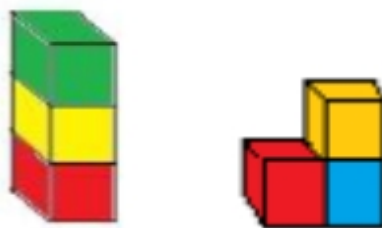


Figura 2. Comparación de volúmenes en estadio inicial

- *Estadio 2.* En este estadio, comienza a emerger la idea de conservación y transitividad. Esto se refleja cuando los alumnos comienzan a utilizar un instrumento intermedio de medida; no se basan en medidas convencionales. Los alumnos por medio del tanteo comienza a apreciar que hacen falta más unidades para cubrir A que B y por tanto A es mayor que B. En este caso, el alumno sabe que la composición A es mayor que B porque tiene más unidades (cubos) (Figura 3)



Figura 3. Comparación de volúmenes en el estadio 2

- *Estadio 3.* En este nivel, el alumno es capaz de construir una composición con el mismo volumen que una figura dada, usándolo como guía para construir otro de igual volumen a base de tanteos, por ensayo-error. Los policubos, sirven como instrumento de medida ya que permite contar las partes por las que está formada una figura, y construir otra con el mismo número de policubos. Es decir, con este recurso, el niño es capaz de ver que, al descomponer una composición policúbica, con esos mismos cubos se puede volver a formar otra figura aparentemente más voluminosa (más ancha o alta), pero sin embargo, con el mismo volumen a pesar de que perceptualmente sugiere lo contrario. El alumno en este nivel considera que la composición puede ser más ancha pero que se compensa con la disminución de otro lado y, por tanto, conserva su volumen inicial.
- *Estadio 4.* El niño puede comprender la idea de rellenar mediante unidades más pequeñas del objeto que hay que medir ya que ahora procede de manera más organizada. No obstante, el niño todavía no es capaz de distinguir el término capacidad y volumen. Un ejemplo para ver si los alumnos han conseguido este estadio, y haciendo uso del recurso manipulativo de los policubos, podría ser la medición de dos objetos de diferentes tamaños (cajas). Los estudiantes deberán ir rellenando con policubos dichos objetos (Figura 4), para seguidamente contar una a una las piezas que han sido necesarias para rellenar cada una de las cajas en este caso, demostrando así que la caja más pequeña ha necesitado menos piezas que la más grande (introducción a la idea de volumen como producto de tres dimensiones).



Figura 4. Introducción de idea de volumen

- *Estadio 5.* Finalmente, en el último estadio, el niño ya es capaz de medir volúmenes mediante cálculos basados en las dimensiones lineales. Es decir, los alumnos en este estadio son capaces de interpretar y visualizar con los policubos que se trata de un producto de tres dimensiones, el cual da lugar a la fórmula del volumen $(l \cdot l \cdot l)$. (Figura 5).



Figura 5. Idea de volumen en función de tres dimensiones

2.2 Actividades

Las actividades pretenden que los alumnos puedan pasar del estadio 2 de la trayectoria de aprendizaje al estadio 3. Es decir, los alumnos en un nivel 2 empiezan a tener conciencia de la idea de conservación y transitividad, utilizando para este fin medidas no convencionales, en este caso, utilizando los policubos. Con la puesta en práctica de nuestras actividades se intenta que partiendo de esta base los alumnos sean capaces de construir y manipular figuras diferentes con el mismo volumen (conservación del volumen). Con ello se llegará a la conclusión de que con un mismo número de policubos se pueden hacer figuras muy diferentes entre sí, pero entre las cuales, su volumen será equitativo, y con esto por tanto, facilitar su transición hacia el estadio 3.

Esta propuesta se basará, en el aprendizaje por descubrimiento, ya que los alumnos serán los protagonistas de su propio proceso de aprendizaje y deberán dar solución a los problemas que se exponen aprendiendo desde el contacto directo con los policubos, guiados por el docente. Además, a través de las preguntas y los problemas que les presentemos, mediante pruebas de tanteo o ensayo/error, serán ellos los que buscarán las posibles soluciones hasta llegar a la más correcta. Por otro lado, también se seguirá una secuenciación inductiva, entendida esta como un método que permite obtener un enunciado general a partir de casos particulares. Es decir, los alumnos partiendo de casos particulares trabajados con los policubos podrán estar en condiciones de enunciar una

regla general sobre la conservación del volumen en los distintos cuerpos. Esta secuenciación de actividades se lleva a cabo utilizando los policubos como recurso, y el soporte papel para que los alumnos vayan registrando todas las conclusiones a las que van llegando. De este modo, los policubos son un recurso que ayudan a los alumnos a comprender la conservación del volumen.

ACTIVIDAD 1: Conservación del volumen

Con esta actividad pretendemos conocer las ideas que poseen los alumnos sobre la conservación del volumen. Por eso, presentaremos dos vasos, con distinta forma, pero con el mismo volumen, para saber si son capaces de identificar que ambos contienen la misma cantidad de líquido u observar el estadio de conocimiento en el que se encuentran.

Observa los siguientes vasos



*¿Cuál crees que tiene más líquido, el vaso verde o el vaso azul?
¿Podrían tener/ocupar la misma cantidad de líquido? ¿Por qué?*

ACTIVIDAD 2

En grupos de 4 personas, tenéis que hacer una figura libre con los policubos, para, a continuación, mostrarla al resto de la clase y explicar cómo la habéis hecho y el número de piezas que habéis utilizado para hacerla.

Seguidamente, tendréis que juntaros aquellos grupos que habéis utilizado el mismo número de policubos para hacer las figuras, y con las mismas piezas crear dos figuras diferentes.

Para acabar, tendréis que contestar las siguientes preguntas, y debatirlo primero en grupo pequeño, y luego en grupo-clase.

- *¿Con el mismo número de policubos se pueden crear diversas figuras distintas?*
- *¿Cuántas figuras diferentes se podrían haber creado con ese número de policubos?*

Para completar esta actividad se pueden usar *applets*, donde los alumnos se divertirán mientras aprenden a utilizar este material. Consiste en diversos juegos donde los alumnos deben ver por cuántos cubos están compuestas las figuras que se muestran. Los alumnos a pesar de haber creado figuras diferentes que aparentemente pueden ser más grandes o más pequeñas, deberán concluir que figuras diferentes pueden estar

formadas por el mismo número de policubos y aunque aún no determinemos que tienen el mismo volumen, ya se van acercando a la idea de que muchas formas diferentes están formadas por las mismas unidades.

ACTIVIDAD 3

Mediante la manipulación y construcción de las figuras y la resolución de los problemas o preguntas planteadas, se espera que (i) el alumno llegue a la idea de que tienen el mismo tamaño (número de policubos) y por tanto que ocupan el mismo espacio (volumen), y (ii) desarrolle la visualización espacial en relación a las propiedades proyectivas.

Construye al menos cuatro figuras diferentes con 6 piezas de los policubos.

- *¿Cuál crees que es más voluminosa? ¿Por qué?*
- *¿Cuántos cubos tiene cada una de tus composiciones? ¿Todos los cubos son iguales, es decir, tienen el mismo tamaño?*
- *Entonces, ¿Esas figuras tienen diferentes volúmenes? ¿Por qué?*

ACTIVIDAD 4

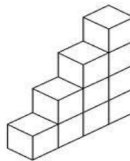
Observa los siguientes dibujos y construye las figuras representadas con los policubos. Constrúyela con los policubos.



Responde a las siguientes cuestiones:

- *¿Cuántos cubos tiene cada figura?*
- *¿Cuántos cubos más tiene la primera figura respecto de la segunda?*

Ahora modifica la siguiente figura, y construye una nueva figura de manera que tenga los mismos cubos.



- *¿Cuántos cubos tiene cada figura?*
- *¿Por tanto, tendrán el mismo volumen las dos figuras? ¿Por qué?*

A partir del análisis de los dos pasos de la actividad (por contraposición de dos situaciones), y mediante la manipulación de los policubos, los alumnos podrán apreciar que en ambos casos construimos figuras diferentes, es decir, que podemos tener figuras diferentes aun utilizando el mismo número de policubos y que, por tanto, el tamaño o

volumen de estas no depende de las formas/apariencias sino del número de unidades (necesitamos unidad de medida).

ACTIVIDAD 5

Construye con los policubos la figura que se muestra a continuación y, seguidamente, construye otra diferente con los mismos cubos, pero ahora, la nueva figura tiene que ser la mitad de alta que la primera figura.



Ahora que la tienes construida, piensa:

- *¿En qué se diferencian las dos figuras? ¿En qué se parecen?*
- *¿Se puede decir que tienen el mismo volumen?*
- *¿Por qué?*

Mediante la manipulación y el tanteo de los policubos, y la posterior observación y comparación de las distintas figuras, se espera contribuir a que el alumno descubra por descomposición y composición, que figuras diferentes ocupan el mismo lugar en el espacio, es decir, tienen el mismo volumen. Se considerara actividad de refuerzo o reafirmación del concepto.

ACTIVIDAD 6

Ordena las siguientes figuras, formadas por diferentes policubos, según el número de policubos utilizados para su realización, de manera que la que más cubos tenga este la primera y la que menos la última.



- *¿Se puede decir que has ordenado las figuras de la más voluminosa a la que menos? ¿Por qué?*

En esta última actividad, con el *policubo*, se espera que los alumnos demuestren que han adquirido la noción de que el volumen no depende de la apariencia y las formas, sino de las unidades por las que está formado, sin necesidad de hablar de ninguna unidad de medida concreta o convencional. La finalidad es que reconozcan que figuras diferentes pueden tener el mismo volumen. En algunos casos se podía tratar de una actividad de ampliación ya que el nivel de abstracción es mayor puesto que si son capaces de reconocer que una es mayor que la otra, conocen que teniendo la misma cantidad de policubos tendrán el mismo volumen. Para aquellos alumnos con dificultades se podría plantear

actividades anexas de refuerzo con *applets* (por sus ventajas icónicas) o con el material manipulativo.

ACTIVIDAD: *Recapitulación final*

- *¿Qué pensaba del volumen de dos figuras con formas diferentes?*
- *¿De qué me he dado cuenta? ¿Qué sé ahora?*

3. Evaluación

La evaluación deberá ser un proceso continuo, y cumplir con las características de ser global, formativa, orientadora, criterial y contextualizada, con sus tres etapas, la inicial, la continua y la final. En cada etapa debemos evaluar el proceso de aprendizaje del alumnado, es decir, si se ha logrado el objetivo principal de la propuesta, que el alumno pase del nivel 1 y 2 de la trayectoria de aprendizaje, al nivel 3 de esta misma, por medio de la práctica directa con los policubos. En ambos casos debemos observar lo que sucede en el aula de manera sistemática. A continuación, presentamos los criterios que se tendrán en cuenta para la evaluación que van en concordancia con los objetivos considerando la trayectoria de aprendizaje.

- Comprende la idea de que diferentes figuras pueden estar formadas por el mismo número de policubos, por lo que ocuparan un mismo espacio.
- Apreciar que al haber figuras diferentes construidas con el mismo número de policubos su volumen es el mismo y no depende de su forma sino del número de unidades.

REFERENCIAS

Antón, J. L., González, F., González, C., Llorente, J., Rodríguez, J.A. y Ruiz, M. J. (1994).

Taller de Matemáticas en la ESO. Madrid: Narcea.

Dickson, L. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas*. Barcelona: Labor.